Exame nacional de Matemática A **(2010, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. O grupo dos 3 livros de Matemática pode ser arrumado de ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ formas diferentes.
Como a prateleira tem duas pontas, o grupo dos três livros pode ser colocado de 2 formas.
Os restantes 5 livros podem ser arrumados de ${}^5A_5 = P_5 = 5!$ formas diferentes.
Logo, o número de arrumações diferentes é

$$3! \times 2 \times 5! = 1440$$

Resposta: **Opção D**

2. Como $P\left(\overline{B}\right) = 0{,}3$, pelo teorema $P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right)$, temos que:

$$P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

$$P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}8$$

Resposta: **Opção D**

3. Como existem 7 perfumes de senhora e são escolhidos 6 ao acaso, podem ser escolhidos 6 perfumes de senhora, e portanto zero perfumes de homem, logo $P(X = 0) > 0$, pelo que podemos excluir as opções (B) e (C).

Calculando a probabilidade de escolher 6 perfumes de senhora, do conjunto dos 10, temos:

$$P(X = 0) = \frac{{}^7C_6}{{}^{10}C_6} = \frac{7}{{}^{10}C_6}$$

Logo, apenas a opção (A) é compatível com este cálculo.

Resposta: **Opção A**

4. Resolvendo a equação, temos:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(-3x) = 2 \Leftrightarrow -3x = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}e^2$$

Resposta: **Opção C**

5. Como a reta de equação $y = -4$ é assíntota do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, então temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -4$$

Logo, vem que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{-4} = \frac{\ln(0^+)}{-4} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$

Resposta: **Opção B**

6. Através da análise do gráfico, podemos descrever a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função f:

x		a		b	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	Máx	↘	min	↗

Logo, o único gráfico apresentado compatível com a monotonia estudada é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

7. Considerando $z = a + bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$), temos que:

- $\overline{z} = a - bi$
- $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a$
- $i \times (z + \overline{z}) = i(2a) = 2ia$
- $i \times (z + \overline{z}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ia = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$

Ou seja o conjunto A é o conjunto dos números complexos z, tais que $\text{Re}\,(z) = 0$, ou seja a sua representação geométrica coincide com o eixo imaginário.

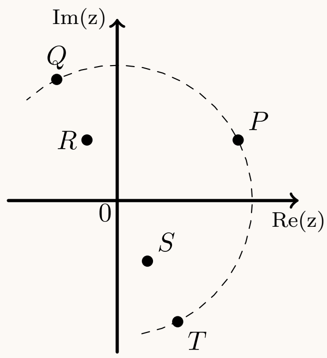
Resposta: **Opção B**

8. A operação "*multiplicar por i*" corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos".

Assim temos que $i \times z = w$, sendo w o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto Q.

Logo $-i \times z = -w$, ou seja o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto T.

Resposta: **Opção D**



GRUPO II

1.

1.1. Começamos por escrever $(-1-i)$ na f.t.:
Seja $-1-i = \rho \operatorname{cis}\theta$:

- $\rho = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$
- $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, porque $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{-1} = 1$, logo $\theta = \frac{\pi}{4} \vee \theta = \pi + \frac{\pi}{4}$, mas como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, logo θ é um ângulo do 3º quadrante.

Assim, aplicando a fórmula de Moivre para a potência, temos que
$(-1-i)^8 = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}\right)^8 = (\sqrt{2})^8 \operatorname{cis}\left(8\times\frac{5\pi}{4}\right) = 16\operatorname{cis}\frac{40\pi}{4} = 16\operatorname{cis}(10\pi) = 16\operatorname{cis}0$

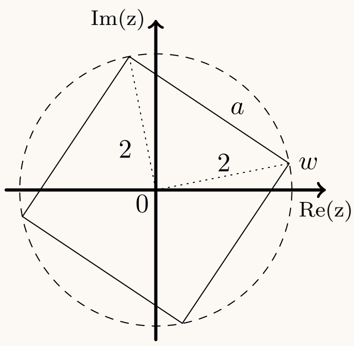
Da mesma forma temos que $\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = \operatorname{cis}\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Assim temos que $z = \frac{(-1-i)^8}{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2}\times\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{16\operatorname{cis}0}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\times\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 16\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$

$= 16\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{2}\right) = 16\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{4}\right) = 16\operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 16\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right) = 16\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

1.2. Sabemos que as quatro raízes quartas de z são números complexos cujas imagens geométricas são os vértices de um quadrado, centrado na origem.

Seja w uma das raízes quartas de z, como $z = 16\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, recorrendo à fórmula de Moivre, temos que $|w| = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$, ou seja a distância dos vértices do quadrado ao centro é 2.



Assim, podemos calcular o lado a do quadrado, recorrendo ao teorema de Pitágoras:
$a^2 = 2^2+2^2 \Leftrightarrow a^2 = 4+4 \Leftrightarrow a^2 = 8 \Leftrightarrow a = \sqrt{8}$
(consideramos apenas a raiz positiva por se tratar de uma medida).

Temos assim que a área A do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z é dada por $A = (\sqrt{8})^2 = 8$

2.

2.1. Se ao total do número de grupos diferentes de 5 alunos que se podem formar com os 27 alunos (${}^{27}C_5$, não se considera relevante a ordem por não haver diferenciação dentro do grupo), subtrairmos os grupos que são formados apenas por rapazes (${}^{17}C_5$) e também os que são formados apenas por raparigas (${}^{10}C_5$, como existem 17 rapazes na turma, o número de raparigas é $27-17=10$), o resultado é o número de grupos em que existe pelo menos um aluno de cada sexo, ou seja

$$^{27}C_5 - ^{17}C_5 - ^{10}C_5 = 74\,290$$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$, é a probabilidade de ter sido escolhido um grupo composto por 2 rapazes e 3 raparigas, sabendo que a Maria e o Manuel integram o grupo.

Assim, $\frac{16 \times ^9 C_2}{^{25}C_3}$ é um cálculo da probabilidade recorrendo à regra de Laplace, ou seja calculando o quociente entre o número de casos favoráveis ($16 \times ^9 C_2$) e o número de casos possíveis ($^{25}C_3$).

O número de casos possíveis, consiste em determinar o número de grupos de 3 elementos que se podem formar com os 25 alunos da turma ($^{25}C_3$) (excluindo a Maria e o Manuel, e não considerando a ordem relevante por não existir diferenciação dentro do grupo). A qualquer um destes grupos juntam-se a Maria e o Manuel, formando um grupo de 5 alunos que incluí estes dois.

O número de casos favoráveis, consiste em determinar o número de grupos de 3 elementos que se podem formar com os 25 alunos da turma, escolhendo 1 de entre os restantes 16 rapazes e 2 de entre as restantes 9 raparigas ($16 \times ^9 C_2$), excluindo a Maria e o Manuel. Como ao rapaz selecionado se junta o Manuel, o grupo será composto por 2 rapazes e como ao conjunto de duas raparigas se junta a Maria, o grupo terá 3 raparigas na sua composição.

Desta forma $P(B|A) = \frac{16 \times ^9 C_2}{^{25}C_3}$

3. Como a probabilidade de pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, é $P(A \cup B)$
Como os acontecimentos A e B são independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

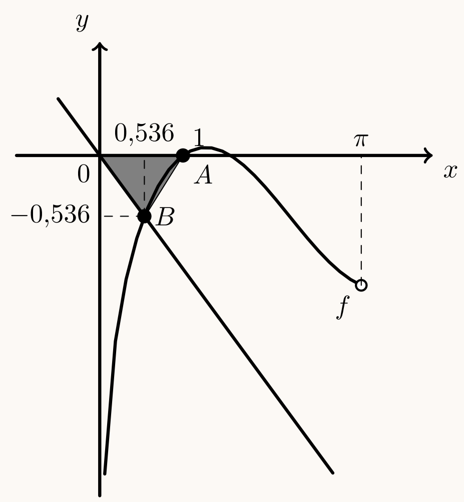
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Pelo que

$$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}94$$

Apresentando o valor da probabilidade calculada em percentagem, temos $P(A \cup B) = 94\%$

4. Traçando na calculadora o gráfico da função f e a bissetriz dos quadrantes pares, ou seja a reta de equação $y = -x$ numa janela compatível com o domínio de f, obtemos o gráfico que se reproduz na figura seguinte.



Logo podemos considerar como a medida da base do triângulo, a abcissa do ponto A, e como a medida da altura o valor absoluto da ordenada do ponto B (como se pode ver na figura).

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores dos zeros de uma função, determinamos o valor da abcissa do ponto A, $x_A = 1$. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos determinamos o valor (aproximado às centésimas) da ordenada do ponto B, $y_B \approx -0{,}536$.

Assim, calculando a área do triângulo, e arredondando o resultado às centésimas, vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{x_A \times |y_B|}{2} \approx \frac{1 \times 0{,}536}{2} \approx 0{,}268 \approx 0{,}27$$

5. Como a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então, como é uma reta de declive igual a zero, vem que

$$m_f = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$$

E assim, determinando o declive da assíntota oblíqua da função g, quando $x \to +\infty$, (porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$), vem:

$$m_g = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 0+1 = 1$$

E como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então, vem que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

E assim, determinando a ordenada na origem da assíntota oblíqua da função g, quando $x \to +\infty$, (porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$), vem:

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) + x - 1\times x\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)\big) = 1$$

Logo, temos que a reta de equação $y = x + 1$ é a assíntota oblíqua gráfico de g, que como tem declive 1 é paralela à reta de equação $y = x$, ou seja a bissetriz dos quadrantes ímpares.

6.

6.1. Para averiguar se a função h é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $h(0) = \lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^+} h(x)$

- $h(0) = 3\ln(0^2+1) = 3\ln(1) = 3\times 0 = 0$
- $\lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-}\big(3\ln(x^2+1)\big) = 3\ln\big((0^-)^2+1\big) = 3\ln(0+1) = 3\ln(1) = 3\times 0 = 0$
- $\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-e^x}{x} = \frac{e^0-e^0}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{x+x}-e^x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x\times e^x-e^x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x(e^x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} e^x \times \underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = e^0\times 1 = 1\times 1 = 1$$

Como $\lim_{x\to0^+} h(x) \neq \lim_{x\to0^-} h(x)$, então a função h não é contínua em $x = 0$

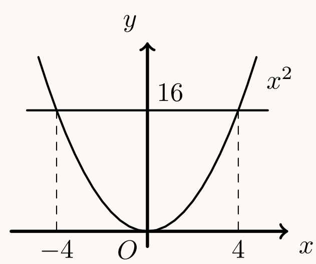
6.2. Temos que

$$h(-4) = ln\left((-4)^2+1\right) = \ln(16+1) = \ln(17)$$

Assim, resolvendo a inequação, em $]-\infty,0]$, temos :

$$h(x) > h(-4) \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) > \ln(17) \Leftrightarrow x^2+1 > 17 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 17-1 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow x < -4 \;\vee\; x > 4$$



Como o domínio de valência da inequação é $]-\infty,0]$, o conjunto solução é:

$$]-\infty,0] \cap \big(]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[\big) =]-\infty,-4[$$

7.

7.1. As três horas da tarde desse dia correspondem a $t = 15$.
Assim, a profundidade correspondente é dada por:

$$P(15) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 15\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{3 \times 5 \times \pi}{3 \times 2}\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8 = 2 \times 0 + 8 = 8$$

Ou seja, às 15 horas, a profundidade da água na marina era de 8 metros.

7.2. Determinando a expressão da derivada, temos:

$$P'(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8\right)' = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)' + (8)' = 2\left(\frac{\pi}{6}t\right)'\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) + 0 = \frac{2\pi}{6}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \operatorname{sen} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = 0 + 2k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{6}t = \pi - 0 + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{6(2k\pi)}{\pi} \ \vee\ t = \frac{6(\pi + 2k\pi)}{\pi}\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 12k \ \vee\ t = 6 + 12k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0{,}24]$, atribuindo valores a k ($k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$), obtemos o conjunto dos zeros da função derivada: $\{0{,}6{,}12{,}18{,}24\}$

Desta forma, estudando a variação de sinal de P' e relacionando com a monotonia da função P, vem:

t	0		6		12		18		24
P'	0	-	0	+	0	-	0	+	0
P	Máx	↘	min	↗	Máx	↘	min	↗	Máx

Logo, a profundidade mínima, que ocorreu às 6 horas e depois novamente às 18 horas, pode ser calculada como:

$$P(6) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) + 8 = 2\cos(\pi) + 8 = 2(-1) + 8 = -2 + 8 = 6$$

Ou seja a profundidade mínima na marina, nesse dia, foi de 6 metros.